UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA AGRÍCOLA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA RURAL- PPGER

SELEÇÃO PARA O DOUTORADO ACADÊMICO EM ECONOMIA RURAL - TURMA 2022
1ª ETAPA ELIMINATÓRIA EM 17 DE JANEIRO DE 2022

INSTRUÇÕES

• Leia atentamente as questões. A interpretação das questões faz parte da prova.
• As questões valem 2,5 pontos cada. Pontuação máxima igual a DEZ (10,0).
• A cada candidato será entregue uma folha-resposta, que deverá ser obrigatoriamente identificada somente com o número de inscrição, de forma legível e devolvida ao final da prova.
• A folha-resposta não poderá ser rasurada, sob nenhuma hipótese, incluindo a proibição do uso do corretivo.
• A prova é individual, não sendo permitida conversa entre os candidatos após o seu início.
• A folha-resposta terá que ser marcada com caneta esferográfica azul ou preta.
• Não será permitida utilização (individual) de calculadora, celulares ou qualquer outro aparelho eletrônico.
• Ao final da prova, o candidato não poderá levar consigo a prova.
• A realização da prova será de 13h00min as 17h00min, o tempo disponível para fazer a prova é de 4 (quatro) horas, improrrogáveis.
• Os dois últimos candidatos ao entregarem a prova, devem deixar juntos o recinto da avaliação, após assinatura confirmando esse fato.

TEORIA ECONÔMICA

QUESTÃO 1: Considere um consumidor com a seguinte função utilidade por dois bens dada por:

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b \quad com\ a, b > 0$$

A renda deste consumidor é denotada por y e os preços dos bens são dados por $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$.

a. Obtenha as funções de demanda marshallianas para os bens.

O problema de maximização de utilidade (PMU) deste consumidor é dado por:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Sujeito a seguinte restrição orçamentária: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$.

As condições de 1ª ordem do PMU resultam em:

$$\frac{UMg(x_1)}{UMg(x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{a x_1^{a-1} x_2^b}{b x_1^a x_2^{b-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = \frac{b}{a}\frac{p_1}{p_2} x_1 \qquad (A)$$

Substituindo (1) na restrição orçamentária:

$$p_1 x_1 + p_2\left(\frac{b}{a}\frac{p_1}{p_2} x_1\right) = y$$

$$p_1 x_1 + \left(\frac{b}{a} p_1 x_1\right) = y$$

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right) p_1 x_1 = y$$

$$\boldsymbol{x_1^* = \frac{a}{(a+b)}\frac{y}{p_1}}$$

Substituindo x_1^* em (A):

$$\boldsymbol{x_2^* = \frac{b}{(a+b)}\frac{y}{p_2}}$$

b. Mostre que as funções de demanda marshaliana são homogêneas de grau zero em relação aos preços e a renda. Do ponto de vista econômico, o que isso representa?

Como vimos no item (a0, as funções de demanda marshaliana são:

$$x_1^*(\boldsymbol{p}, y) = \frac{a}{(a+b)} \frac{y}{p_1} \text{ e } x_2^*(\boldsymbol{p}, y) = \frac{b}{(a+b)} \frac{y}{p_2}$$

Seja $t \geq 0$, então,

$$x_1^*(t\boldsymbol{p}, ty) = \frac{a}{(a+b)} \frac{ty}{tp_1} = \frac{a}{(a+b)} \frac{y}{p_1} = x_1^*(\boldsymbol{p}, y)$$

$$x_2^*(t\boldsymbol{p}, ty) = \frac{b}{(a+b)} \frac{ty}{tp_2} = \frac{b}{(a+b)} \frac{y}{p_2} = x_2^*(\boldsymbol{p}, y)$$

Do ponto de vista econômico, a homogeneidade de grau zero das funções de demanda sinalizam que aumentos nos preços e na renda em uma mesma proporção ($t \geq 0$) não alteram o conjunto orçamentário do consumidor e não alteram a sua escolha ótima.

c. Obtenha a função utilidade indireta.

A função de utilidade indireta é dada por:

$$v(\boldsymbol{p}, y) = u\big(x_1^*(\boldsymbol{p}, y), x_2^*(\boldsymbol{p}, y)\big)$$

Fonte: Varian (1992), p. 107.

Assim:

$$v(\boldsymbol{p}, y) = \left(\frac{a}{(a+b)} \frac{y}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{(a+b)} \frac{y}{p_2}\right)^b$$

$$v(\boldsymbol{p}, y) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{b}{p_2}\right)^b \left(\frac{y}{(a+b)}\right)^{a+b}$$

d. Demostre que, aplicando a identidade de Roy, é possível recuperar as funções de demanda marshalianas a partir da função de utilidade indireta.

A identidade de Roy estabelece que, se $x(\boldsymbol{p}, y)$ é uma função de demanda marshaliana, então:

$$x_i(\boldsymbol{p}, y) = -\frac{\partial v(\boldsymbol{p}, y)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial v(\boldsymbol{p}, y)}{\partial y}$$

considerando que $p_i > 0$ e $y > 0$.

Fonte: Varian (1992), p. 106.

Assim:

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{p},y)}{\partial p_1} = -\left(\frac{a}{p_1}\right)^{a+1}\left(\frac{b}{p_2}\right)^{b}\left(\frac{y}{(a+b)}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{p},y)}{\partial p_2} = -\left(\frac{b}{p_2}\right)^{b+1}\left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{y}{(a+b)}\right)^{a+b}$$

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{p},y)}{\partial y} = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{b}{p_2}\right)^{b}\left(\frac{y}{(a+b)}\right)^{a+b-1}$$

Então:

$$x_1(\boldsymbol{p},y) = -\frac{\frac{\partial v(\boldsymbol{p},y)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v(\boldsymbol{p},y)}{\partial y}} = \frac{a}{(a+b)}\frac{y}{p_1}$$

$$x_2(\boldsymbol{p},y) = -\frac{\frac{\partial v(\boldsymbol{p},y)}{\partial p_2}}{\frac{\partial v(\boldsymbol{p},y)}{\partial y}} = \frac{a}{(a+b)}\frac{y}{p_2}$$

QUESTÃO 2: Considere uma firma que produz um produto Y com os insumos x_1 e x_2 e tecnologia dada pela seguinte função de produção:

$$y = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \qquad ; \quad 0 \neq \rho < 1$$

a. Considerando os preços dos insumos dados por w_1 e w_2, obtenha as funções de demanda condicionada por insumos resolvendo um problema de minimização de custos.

O problema de minimização de custo (PMC) desta firma é dado por:

$$\min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \geq y$$

As condições de 1ª ordem do PMC resultam em:

$$\frac{PMg(x_1)}{PMg(x_2)} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$\frac{x_1^{\rho-1}}{x_2^{\rho-1}} = \frac{w_1}{w_2} \qquad (A)$$

As funções de demanda derivada devem conter y. Assim, vamos manipular a expressão (A). Elevando ambos os lados por $\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)$:

$$\frac{x_1^\rho}{x_2^\rho} = \frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

$$w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} x_1^\rho = w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} x_2^\rho$$

Adicionando $w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} x_2^\rho$ em ambos os lados:

$$w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} x_1^\rho + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} x_2^\rho = w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} x_2^\rho + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} x_2^\rho$$

$$\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right) w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} = \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right) x_2^\rho$$

Elevando ambos os lados por $\left(\frac{1}{\rho}\right)$

$$\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} w_2^{\frac{1}{\rho-1}} = \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}} x_2$$

$$y\, w_2^{\frac{1}{\rho-1}} = \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}} x_2$$

$$x_2^* = \frac{w_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y$$

De forma análoga

$$x_1^* = \frac{w_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y$$

Fonte: Varian (1992), p. 55 e 56.

b. Obtenha a função Custo desta firma.

A função custo é dada por:

$$C = w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$$

$$C = w_1 \left(\frac{w_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y \right) + w_2 \left(\frac{w_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y \right)$$

$$C(w_1, w_2, y) = \left(w_1{}^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2{}^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} y$$

Fonte: Varian (1992), p. 55 e 56.

c. Demostre que a Função Custo é homogênea de grau 1 em relação aos preços dos insumos.

$$C(tw_1, tw_2, y) = \left((tw_1)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + (tw_2)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} y$$

$$C(tw_1, tw_2, y) = \left((t)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\left(w_1{}^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2{}^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} y$$

$$C(tw_1, tw_2, y) = t\left(w_1{}^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2{}^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} y$$

d. Aplicando o Lema de Shepard, mostre que é possível recuperar as funções de demanda condicionada pelos insumos.

O Lema de Shepard estabelece que, se $x_i(\boldsymbol{w}, y)$ é uma função de demanda condicionada por insumo i, a função custo é diferenciável em w e y, e $w_i > 0$ para todo i, então:

$$x_i(\boldsymbol{w}, y) = \frac{\partial C(\boldsymbol{w}, y)}{\partial w_i}$$

Fonte: Varian (1992), p. 74.

Assim:

$$\frac{\partial C(\boldsymbol{w}, y)}{\partial w_1} = \left(w_1{}^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2{}^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\left(w_1{}^{\frac{1}{\rho-1}}\right) y$$

$$\frac{\partial C(\boldsymbol{w}, y)}{\partial w_1} = x_1(\boldsymbol{w}, y) = \frac{w_1{}^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1{}^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2{}^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y$$

E

$$\frac{\partial C(\boldsymbol{w}, y)}{\partial w_2} = \left(w_1{}^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2{}^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\left(w_2{}^{\frac{1}{\rho-1}}\right) y$$

$$\frac{\partial C(\boldsymbol{w}, y)}{\partial w_2} = x_2(\boldsymbol{w}, y) = \frac{w_2{}^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1{}^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2{}^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} y$$

MÉTODOS QUANTITATIVOS

QUESTÃO 1: Uma das hipóteses clássicas do modelo de regressão linear é que " os termos de erro têm variância uniforme e não são correlacionados uns com os outros". Explique-a.

Resposta: Essa hipótese clássica afirma que a variância é constante, ou seja, a variância do termo de erro, condicionada às variáveis explicativas, é a mesma para todas as combinações de resultados das variáveis explicativas. Trata-se da Homocedasticidade, esta hipótese necessita que a variância do erro não observado não dependa dos valores da variável explicativa; caso a variância se altere com qualquer uma das variáveis explicativas, tem-se heterocedasticidade.

QUESTÃO 2: Apresente matematicamente o problema de estimação sobre restrições lineares.

Resposta: O problema que se coloca é como pode-se estimar modelo que possua algum tipo de restrição nos seus parâmetros.

Problema:

Min e'e sujeito a Rb=r

Para problemas de otimização com restrição, utiliza-se o método de otimização de Lagrange. Assim, escrevemos a seguinte função:

L= (y-xb)'(y-xb) - $\lambda(Rb - r)$